Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schematy oceniania zadań otwartych

Matematyka

Poziom podstawowy

CZERWIEC 2013

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Odp.	B	C	C	B	C	C	A	A	B	B	C	A	B	A	A	A	B	D	B	C	C	C	D	C	A	C

Schematy oceniania zadań otwartych

Zadania 27. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 = 0$.

<u>I sposób rozwiązania</u> (metoda grupowania)
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu stosując metodę grupowania wyrazów, np.: $x^2(3x-4)-(3x-4)=0$ lub $3x(x^2-1)-4(x^2-1)=0$, stąd $(3x-4)(x^2-1)=0$.

Zatem $x=\frac{4}{3}$ lub $x=-1$ lub $x=1$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np.: $(x^2-1)(3x-4)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=\frac{4}{3}$ lub $x=-1$ lub $x=1$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (metoda dzielenia)

- Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3-4x^2-3x+4$. Dzielimy wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez dwumian $x-1$. Otrzymujemy iloraz $3x^2-x-4$. Zapisujemy równanie w postaci $(x-1)(3x^2-x-4)=0$. Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2-x-4$: $\Delta=1+4\cdot3\cdot4=49$. Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1=\frac{1-7}{6}=-1$ oraz $x_2=\frac{1+7}{6}=\frac{4}{3}$. Zatem $x=\frac{4}{3}$ lub $x=-1$ lub $x=1$.

albo

- stwierdzamy, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3-4x^2-3x+4$. Dzielimy wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez dwumian $x+1$. Otrzymujemy iloraz $3x^2-7x+4$. Zapisujemy równanie w postaci $(x+1)(3x^2-7x+4)=0$. Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2-7x+4$: $\Delta=49-4\cdot3\cdot4=1$. Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1=\frac{7-1}{6}=1$ oraz $x_2=\frac{7+1}{6}=\frac{4}{3}$. Zatem $x=\frac{4}{3}$ lub $x=-1$ lub $x=1$.

albo

- stwierdzamy, że liczba $\frac{4}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $3x^3-4x^2-3x+4$. Dzielimy wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez dwumian $x-\frac{4}{3}$. Otrzymujemy iloraz $3x^2-3$.

Zapisujemy równanie w postaci $\left(x-\frac{4}{3}\right)\cdot(3x^2-3)=0$ i dalej $3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)(x+1)=0$.

Zatem $x=\frac{4}{3}$ lub $x=-1$ lub $x=1$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- podzieli wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez dwumian $x-1$, otrzyma iloraz $3x^2-x-4$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo
- podzieli wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez dwumian $x+1$, otrzyma iloraz $3x^2-7x+4$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo
- podzieli wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez dwumian $x-\frac{4}{3}$, otrzyma iloraz $3x^2-3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo
- podzieli wielomian $3x^3-4x^2-3x+4$ przez trójmian x^2-1, otrzyma iloraz $3x-4$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=\frac{4}{3}$ lub $x=-1$ lub $x=1$.

<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający poda jedynie dwa pierwiastki wielomianu oraz zbiór $\left\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3}\right\}$ wszystkich liczb wymiernych, w którym znajduje się trzeci pierwiastek wielomianu, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $2+\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

<u>I sposób rozwiązania</u>
Ponieważ $2+\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=2+\sin\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=2+\sin\alpha$, więc obliczymy sinus tego kąta. Otrzymujemy zatem kolejno

$$\sin^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16},$$

skąd wynika, że $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ (α jest kątem ostrym). Zatem wartość tego wyrażenia równa się $2\frac{3}{4}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- zauważy, że $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

albo

- obliczy wartość sinusa danego kąta $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ i popełni błąd w obliczeniach.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy zapisze, że wartość wyrażenia $2+\sin^3\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$ jest równa $2\frac{3}{4}$.

II sposób rozwiązania

Ponieważ $2+\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha = 2+\sin\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right) = 2+\sin\alpha$, więc obliczymy wartość $\sin\alpha$. Rysujemy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 4, zaś przyprostokątnych równych $\sqrt{7}$ i a oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$a^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 4^2, \text{ skąd } a = 3.$$

Zatem $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, a więc wartość wyrażenia jest równa $2\frac{3}{4}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- gdy narysuje trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 4, przyprostokątnych równych $\sqrt{7}$ oraz a, zaznaczy kąt ostry α taki, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, obliczy długość drugiej przyprostokątnej $a=3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- zauważy, że $\sin^3\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy zapisze, że wartość wyrażenia $2+\sin^3\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$ jest równa $2\frac{3}{4}$.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.

Rozwiązanie

W zapisie każdej z szukanych liczb na pierwszym miejscu (miejscu cyfry tysięcy) może wystąpić jedna z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, czyli mamy 9 możliwości. Na trzecim miejscu (miejscu cyfry dziesiątek) może być jedna z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, czyli mamy 10 możliwości. Ponieważ cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek, więc na miejscu

drugim (miejscu cyfry setek) może wystąpić jedna z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i wtedy na miejscu czwartym (miejscu cyfry jedności) wystąpi odpowiednio cyfra: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zatem mamy 7 możliwości, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.
Zatem mamy $9\cdot 10\cdot 7=630$ liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- wypisze wszystkie możliwości obsadzenia cyfry setek i cyfry jedności liczby czterocyfrowej, w której cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek:
 _0_3, _1_4, _2_5, _3_6, _4_7, _5_8, _6_9 lub zapisze, że jest 7 takich możliwości

albo

- zapisze, że cyfrę tysięcy możemy wybrać na 9 sposobów, a cyfrę dziesiątek na 10 lub wypisze te możliwości (np. 1_0_, 1_1_, ... , 1_9_, 2_0_, 2_1_, ... , 2_9, ... , 9_0_, 9_1_, 9_9_) lub obliczy, że jest 90 takich możliwości.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poprawnie obliczy, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek: $9\cdot 10\cdot 7=630$.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Wykaż, że liczba $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$ jest dzielnikiem liczby
$1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$.

I sposób rozwiązania

Zauważamy, że liczbę $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$ można zapisać w postaci, np.:

$$1+2013+(1+2013)2013^2+(1+2013)2013^4+(1+2013)2013^6=$$
$$(1+2013)\left(1+2013^2+2013^4+2013^6\right).$$

Liczbę $1+2013^2+2013^4+2013^6$ zapisujemy w postaci $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$.

Zatem liczba $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$ jest dzielnikiem liczby

$$1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

zapisze liczbę $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$ w postaci $(1+2013)\left(1+2013^2+2013^4+2013^6\right)$ i nie zauważy, że liczbę $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$ można zapisać w postaci $1+2013^2+2013^4+2013^6$,

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Zdający może rozłożyć na czynniki wielomian $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$, gdzie $x=2013$. Wtedy zdający otrzymuje **1 punkt** za zapisanie tego wielomianu w postaci iloczynu

$$\left(1+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3\right),$$

a za zapisanie, że $1+x+x^2+x^3=(1+x)\left(1+x^2\right)$ i uzasadnienie podzielności otrzymuje **2 punkty**.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że suma $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$ jest sumą ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1=1$, $q=2013$ i $a_8=2013^7$.

Stąd

$$S_8=1\cdot\frac{1-2013^8}{1-2013}=\frac{\left(1-2013^4\right)\left(1+2013^4\right)}{1-2013}=\frac{\left(1-2013^2\right)\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)}{1-2013}=$$

$$=\frac{\cancel{(1-2013)}\,(1+2013)\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)}{\cancel{1-2013}}=2014\cdot\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$$

Zatem liczba $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$ jest dzielnikiem liczby

$$1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- zauważy, że liczba $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$ jest sumą ośmiu wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1=1$, $q=2013$ i $a_8=2013^7$

albo

- zapisze, że $S_8=1\cdot\frac{1-2013^8}{1-2013}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i zapisze

$$1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7=(1+2013)\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right).$$

III sposób rozwiązania

Zauważamy, że liczbę $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$ można zapisać w postaci, np.: $\left(1+2013^4\right)+2013\left(1+2013^4\right)+2013^2\left(1+2013^4\right)+2013^3\left(1+2013^4\right)=$

$$=\left(1+2013^4\right)\left(1+2013+2013^2+2013^3\right)=\left(1+2013^4\right)\left[\left(1+2013^2\right)+2013\left(1+2013^2\right)\right]=$$

$$=\left(1+2013^4\right)\left[\left(1+2013^2\right)+2013\left(1+2013^2\right)\right]=\left(1+2013^4\right)\left(1+2013^2\right)(1+2013).$$

Zatem liczba $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$ jest dzielnikiem liczby $1+2013+2013^2+\ldots+2013^7$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze liczbę $1+2013+2013^2+\ldots+2013^7$ w postaci $\left(1+2013^4\right)\left(1+2013+2013^2+2013^3\right)$
i nie zauważy, że liczbę $\left(1+2013+2013^2+2013^3\right)$ można zapisać w postaci $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013\right)$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadania 31. (*2 pkt*)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 7\cdot 3^{n+1}$, dla $n\geq 1$. Oblicz iloraz q tego ciągu.

Rozwiązanie (I sposób)

Ponieważ ciąg (a_n) jest geometryczny, więc wystarczy obliczyć dwa kolejne wyrazy tego ciągu, np. $a_1 = 7\cdot 3^{1+1} = 7\cdot 9$ oraz $a_2 = 7\cdot 3^{2+1} = 7\cdot 27$. Iloraz ciągu (a_n) jest więc równy $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{7\cdot 27}{7\cdot 9}=3$.

Rozwiązanie (II sposób)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1 = 7\cdot 3^{1+1} = 63$. Ponieważ ciąg (a_n) jest geometryczny oraz $a_n = 7\cdot 3^{n+1} = 7\cdot 3^n\cdot 3^1 = 21\cdot 3^n = 63\cdot 3^{n-1} = a_1\cdot 3^{n-1}$, więc ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego wynika, że iloraz tego ciągu jest równy $q=3$.

Rozwiązanie (III sposób)

Ponieważ wszystkie wyraz ciągu (a_n) są różne od zera, więc iloraz q tego ciągu jest równy

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\cancel{7}\cdot 3^{(n+1)+1}}{\cancel{7}\cdot 3^{n+1}}=3 \text{ dla } n\geq 1.$$

Rozwiązanie (IV sposób)

Dla każdego $n\geq 1$ mamy $a_{n+1} = 7\cdot 3^{(n+1)+1} = 7\cdot 3^{n+1}\cdot 3^1 = 3\cdot 7\cdot 3^{n+1} = 3\cdot a_n$, więc ciąg (a_n) jest geometryczny, a jego iloraz jest równy 3.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy

- obliczy dwa kolejne wyrazy ciągu (a_n), np.: $a_1 = 7\cdot 3^{1+1} = 7\cdot 9$ oraz $a_2 = 7\cdot 3^{2+1} = 7\cdot 27$ oraz poprawnie zapisze relację między tymi wyrazami, np.: $a_2 = a_1\cdot q$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy iloraz ciągu

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu i zapisze n-ty wyraz ciągu w postaci $a_n = 63\cdot 3^{n-1}$ i na tym poprzestanie lub błędnie poda iloraz ciągu.

albo

- wyznaczy $n+1$ wyraz ciągu (a_n) oraz poprawnie zapisze relację między wyrazami,

  np.: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ lub $a_{n+1} = a_n \cdot q$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy iloraz ciągu.

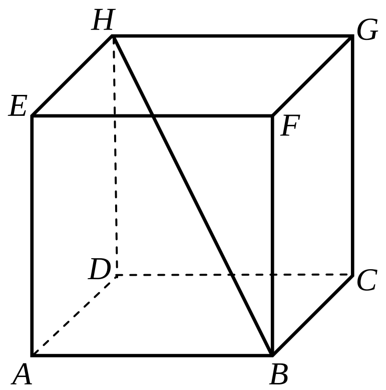
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy iloraz q: $q = 3$.

Uwaga

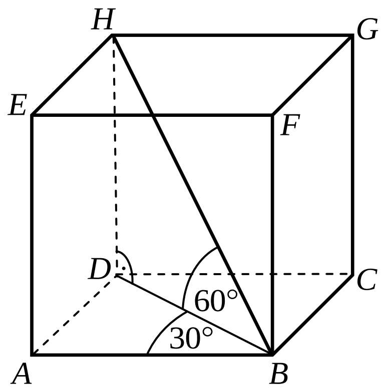
Jeżeli zdający poda od razu iloraz ciągu $q = 3$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32. (*4 pkt)*

Podstawą graniastosłupa *ABCDEFGH* jest prostokąt *ABCD* (zobacz rysunek), którego krótszy bok ma długość 3. Przekątna prostokąta *ABCD* tworzy z jego dłuższym bokiem kąt $30°$. Przekątna *HB* graniastosłupa tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt $60°$.Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Rozwiązanie (krawędź podstawy *AB*, przekątna *BD* i wysokość *DH* graniastosłupa)



Uwaga

Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów rozwiązania:

- obliczenie długości dłuższej krawędzi podstawy graniastosłupa, ew. długości przekątnej podstawy i wysokości tego graniastosłupa
- obliczenie pola podstawy graniastosłupa
- obliczenie objętości ostrosłupa.

Niech $|AD| = 3$. Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym *ABD* wynika, że

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \operatorname{tg}30^\circ \text{, stąd } |AB| = 3\sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ABD* otrzymujemy

$$|BD| = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = 6.$$

Pole *P* podstawy graniastosłupa (pole prostokąta *ABCD*) jest równe: $P = 9\sqrt{3}$.
A teraz z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym *BDH* otrzymujemy, że

$$\frac{|DH|}{|BD|} = \operatorname{tg}60^\circ \text{, stąd } |DH| = 6\sqrt{3}.$$

Obliczamy zatem objętość graniastosłupa *ABCDEFGH*: $V = 9\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 162$.

<u>**Schemat oceniania rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie

- długości dłuższej krawędzi podstawy graniastosłupa: $|AB| = 3\sqrt{3}$

albo

- długości przekątnej podstawy graniastosłupa: $|BD| = 6$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie

- długości dłuższej krawędzi podstawy graniastosłupa i długości przekątnej podstawy graniastosłupa: $|AB| = 3\sqrt{3}$, $|BD| = 6$.

albo

- pola podstawy graniastosłupa: $P_{ABCD} = |BC| \cdot |BD| \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie

- długości dłuższej krawędzi podstawy graniastosłupa i długości przekątnej podstawy graniastosłupa i wysokości graniastosłupa: $|AB| = 3\sqrt{3}$, $|BD| = 6$, $|DH| = 6\sqrt{3}$

albo

- pola podstawy graniastosłupa i wysokości graniastosłupa: $P_{ABCD} = 9\sqrt{3}$, $|DH| = 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 162$.

<u>Uwaga</u>
Zdający może zauważyć, że trójkąt *ABD* jest „połową” trójkąta równobocznego, w którym połowa długości boku jest równa 3, pole podstawy graniastosłupa jest równe polu takiego trójkąta równobocznego i od razu zapisać, że $|AB| = 3\sqrt{3}$, $|BD| = 6$, $P_{ABCD} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.
Podobnie może zauważyć, że trójkąt *BHD* jest „połową” trójkąta równobocznego, w którym połowa długości boku jest równa 6 i od razu zapisać $|DH| = 6\sqrt{3}$.

Zadanie 33. *(5 pkt)*

Grupa znajomych wykupiła wspólnie dostęp do Internetu na okres jednego roku. Opłata miesięczna wynosiła 120 złotych. Podzielono tę kwotę na równe części, by każdy ze znajomych płacił tyle samo. Po upływie miesiąca do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby i wówczas opłata miesięczna przypadająca na każdego użytkownika zmniejszyła się o 5 złotych. Ile osób liczyła ta grupa w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu?

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu, zaś y – opłatę przypadającą na każdą z tych osób (w zł). Koszt wykupienia dostępu do Internetu opisuje równanie $x\cdot y=120$.

Gdy do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby, to opłata przypadająca na każdego użytkownika zmniejszyła się o 5 złotych miesięcznie. Otrzymujemy zatem równanie: $(x+2)\cdot(y-5)=120$.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x\cdot y=120 \\ (x+2)\cdot(y-5)=120 \end{cases}.$$

Drugie równanie możemy zapisać w postaci

$$xy-5x+2y-10=120.$$

Stąd i z pierwszego równania otrzymujemy

$$120-5x+2y-10=120,$$

$$2y=5x+10,$$

$$y=\frac{5}{2}x+5.$$

Podstawiamy do pierwszego równania układu i otrzymujemy

$$x\left(\frac{5}{2}x+5\right)=120,$$

$$\frac{5}{2}x^2+5x-120=0,$$

$$x^2+2x-48=0.$$

$$\Delta=4+192=196=14^2$$

Zatem

$$x_1=\frac{-2-14}{2}=-8,\ x_2=\frac{-2+14}{2}=6.$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba osób nie może być ujemna. Zatem w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu grupa liczyła 6 osób.

Uwaga

Z równania $120-5x+2y-10=120$ możemy także wyznaczyć $x=\frac{2}{5}y-2$. Wówczas otrzymujmy równanie

$$\left(\frac{2}{5}y-2\right)y=120,$$

$$\frac{2}{5}y^2-2y-120=0,$$

$$y^2 - 5y - 300 = 0.$$

$$\Delta = 25 + 1200 = 1225 = 35^2$$

Zatem

$$y_1 = \frac{5-35}{2} = -15,\ y_2 = \frac{5+35}{2} = 20.$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy, gdyż opłata nie może być ujemna. Gdy $y = 20$, to wtedy $x = \frac{2}{5} \cdot 20 - 2 = 6$. Zatem w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu grupa liczyła 6 osób.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie zależności między x – ilością osób w grupie i y – opłatą przypadająca na każdą z tych osób, np.:

- $x \cdot y = 120$

albo

- $(x+2)\cdot(y-5) = 120$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np. $\begin{cases} x \cdot y = 120 \\ (x+2)\cdot(y-5) = 120. \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$$x\left(\frac{5}{2}x+5\right) = 120 \text{ lub} \left(\frac{2}{5}y-2\right)\cdot y = 120 \text{ lub} (x+2)\left(\frac{120}{x}-5\right) = 120 \text{ lub } \left(\frac{120}{y}+2\right)(y-5) = 120.$$

<u>Uwaga</u>

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą x i rozwiązanie tego równania z błędem rachunkowym

albo

- bezbłędne rozwiązanie równania z niewiadomą y i nie obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą y z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu: 6.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Niech x oznacza liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu.

Wtedy opłata przypadającą na każdą z tych osób jest równa $\frac{120}{x}$ zł. Gdy do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby, to liczba osób w grupie jest wtedy równa $x+2$, więc opłata przypadająca wówczas na każdego użytkownika jest równa $\frac{120}{x+2}$ zł. Ponieważ opłata zmniejszyła się o 5 zł, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x+2} + 5.$$

Przekształcamy je do postaci

$$x^2 + 2x - 48 = 0.$$

$$\Delta = 4 + 192 = 196 = 14^2$$

Zatem

$$x_1 = \frac{-2-14}{2} = -8,\ x_2 = \frac{-2+14}{2} = 6.$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba osób nie może być ujemna. Zatem w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu grupa liczyła 6 osób.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Przyjęcie oznaczenia, np.: x - liczba osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu oraz wyznaczenie opłaty przypadającej na jedną osobę w zależności od przyjętej zmiennej $\frac{120}{x}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Wyznaczenie opłaty przypadającej na jedną osobę w zależności od przyjętej zmiennej w sytuacji, gdy liczba osób zwiększyła się o 2: $\frac{120}{x+2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+2} + 5$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Zapisanie równania kwadratowego, np. $x^2 + 2x - 48 = 0$ i rozwiązanie go z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu: 6.

<u>Uwagi</u>

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów.**
2. Jeżeli zdający odgadnie liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający poda liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, ale sprawdzi, że spełnione są wówczas warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający systematycznie sprawdza, czy są spełnione warunki zadania dla kolejnych liczb od 1 do 6 i poda liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu, to otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 34. (*5 pkt*)

Wierzchołki trapezu *ABCD* mają współrzędne: $A=(-1,-5)$, $B=(5,1)$, $C=(1,3)$, $D=(-2,0)$. Napisz równanie okręgu, który jest styczny do podstawy *AB* tego trapezu, a jego środek jest punktem przecięcia się prostych zawierających ramiona *AD* oraz *BC* trapezu *ABCD*.

Rozwiązanie

Wyznaczamy równania prostych zawierających ramiona *AD* oraz *BC* trapezu, odpowiednio:

$$y=-5x-10 \text{ oraz } y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}.$$

Środkiem okręgu *S* jest punkt przecięcia się prostych o wyznaczonych równaniach.
Aby wyznaczyć współrzędne punktu *S* zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y=-5x-10 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \end{cases}$$

Stąd $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}=-5x-10$, czyli $x=-3$. Zatem $y=5$, czyli $S=(-3,5)$. Zauważmy, że promień szukanego okręgu jest równy odległości punktu *S* od prostej *AB*. Trzeba też sprawdzić, czy punkt styczności okręgu i prostej *AB* leży na podstawie tego trapezu.
Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej *AB* przechodzącej przez punkt *S*: $y=-x+2$, a następnie wyznaczamy współrzędne punktu *P* przecięcia się tej prostej z prostą *AB*. Rozwiązujemy zatem układ równań $\begin{cases} y=-x-2 \\ y=x-4 \end{cases}$ i zapisujemy, że $P=(3,-1)$.

Zauważmy, że punkt *P* leży między punktami *A* i *B*, gdyż $x_A=-1<x_P=3<x_B=5$.
Obliczamy promień okręgu *r*:

$$r=|SP|=\sqrt{(3+3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$$

Zapisujemy równanie okręgu o środku *S* i promieniu *r*:

$$(x+3)^2+(y-5)^2=72.$$

Uwaga

Promień okręgu *r* możemy także wyznaczyć w inny sposób:

1. Wyznaczamy równanie prostej $AB\colon y=x-4$ i obliczamy promień okręgu: $r=\frac{|-3-5-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$.
2. Obliczamy pole trójkąta *ABS*, korzystając ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $A=(-1,-5)$, $B=(5,1)$, $S=(-3,5)$:
   $$P_{ABS}=\frac{1}{2}\left|(5+1)(5+5)-(1+5)(-3+1)\right|=\frac{1}{2}\left|60-(-12)\right|=36.$$

Pole trójkąta *ABS* możemy zapisać w inny sposób: $P_{ABS}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot r$.

Ponieważ $|AB|=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$, to $36=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot r$. Stąd $r=\frac{36}{3\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie równania prostej zawierającej ramię *AD* trapezu **albo** równania prostej zawierającej ramię *BC* trapezu, odpowiednio: $y=-5x-10$ albo $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie współrzędnych środka okręgu *S*: $S=\left(-3,5\right)$.

Uwaga

Zdający może podać rozwiązanie układu równań $\begin{cases} y=-5x-10 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \end{cases}$ bez obliczeń.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Obliczenie promienia *r* okręgu: $r=6\sqrt{2}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- wyznaczenie współrzędnych środka okręgu z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie długości promienia okręgu oraz zapisanie równania okręgu

albo

- obliczenie długości promienia okręgu z błędem rachunkowym i konsekwentne zapisanie równania okręgu.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Zapisanie równania okręgu ośrodku *S* i promieniu *r*: $(x+3)^2+(y-5)^2=72$.

Uwaga

Jeśli zdający odczytał z rysunku współrzędne środka okręgu *S* , nie sprawdził, że ten punkt należy do prostych *AD* i *BC* i kontynuował rozwiązanie do końca, to za takie rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.